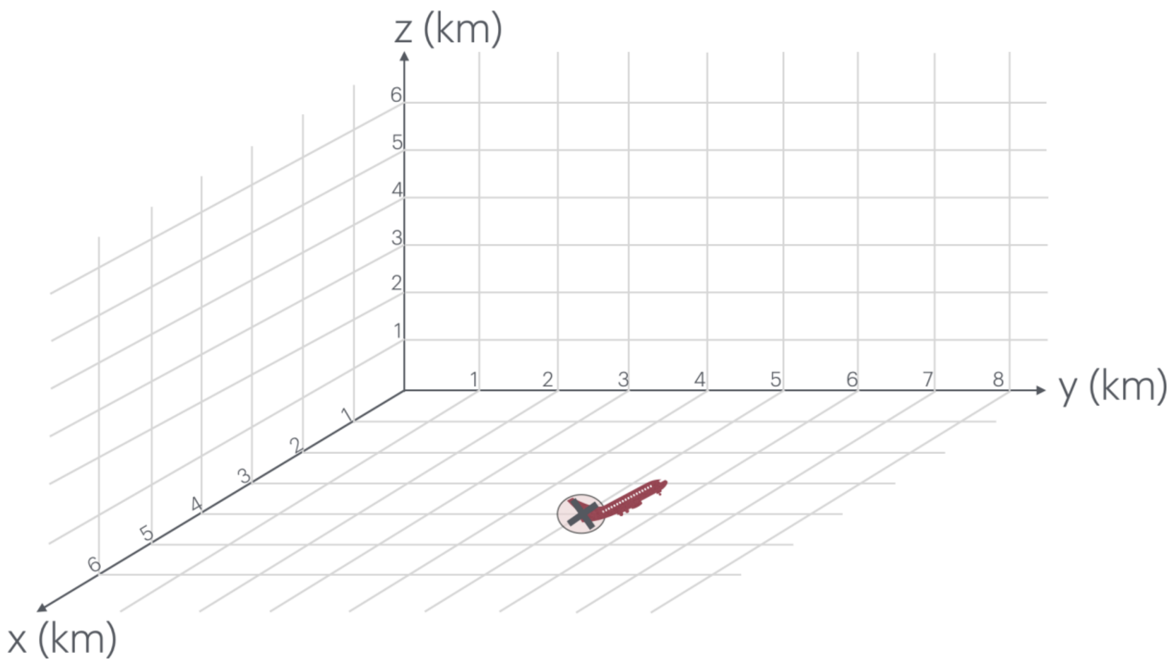
# PBAU25 - Mostra d'exercicis de caire competencial

## 1 Matemàtiques II - Geometria

**Problema 1.** Un avió es disposa a enlairar-se, des del punt marcat amb una creu sobre l'esbós, formant un angle amb el pla XY de 30°, en direcció del vector $\vec{v} = (1, a, b)$, amb $a, b > 0$ i durant una longitud de 5 km.




a) [P. mecànica] Calculau el vector $\vec{v}$ que indica la direcció i el mòdul de la trajectòria d'enlairament.

b) [P. de raonament] En quin punt es troba l'avió després de l'enlairament.

c) [P. de raonament] Calculau tots els plans ortogonals a la trajectòria de l'avió durant el seu enlairament.

**Solució:**

a) Sabem que l'angle entre $\vec{v}$ i el pla XY és de $\alpha = 30°$. A més, sabem que l'angle entre el vector $\vec{v}$ i el vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ al pla XY satisfà que

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Al nostre cas, $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Aleshores, imposant això i que volem que el seu mòdul sigui 5, tenim que:

$$(1) \quad \sqrt{1^2 + a^2 + b^2} = 5,$$

$$(2) \quad \cos(60) = \frac{0 + 0 + b}{\sqrt{1^2 + a^2 + b^2}} = \frac{0 + 0 + b}{5} \rightarrow b = 5\cos(60) = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ km}.$$

Aleshores,

$$\sqrt{1 + a^2 + 25/4} = 5 \quad \rightarrow \quad 4a^2 + 29 = 100 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{71}{4}} = \frac{\sqrt{71}}{2} \approx 4,2131 \text{ km}.$$

Per tant, $\vec{v} = \left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

b) Sigui $P$ el punt on es troba l'avió després de l'enlairament, i notam que l'avió es troba al punt (4, 5, 0) just abans d'iniciar l'enlairament. Llavors, tenim que

$$\vec{OP} = (4, 5, 0) + \left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(5, \frac{10 + \sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Notem que el vector sumat ja és el que tenia mòdul 5 km, ja que ho havíem imposat així en l'apartat (a). Si no, s'hauria de modificar per complir aquesta condició. Llavors, el punt solució és el:

$$\left(5, \frac{10 + \sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right) \approx (5, 9.21, 2.5)$$

c) El vector normal a aquests plans és el $\left(1, \frac{\sqrt{71}}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Aleshores, l'equació dels plans ve donada per

$$x + \frac{\sqrt{71}}{2} y + \frac{5}{2} z + D = 0$$

on $D \in \mathbb{R}$.

**Problema 2**

La NASA es disposa a llançar una nau espacial des de la base que té a cap Canaveral, Florida.

a) [P. mecànica] Suposem que la nau viatja sempre en línia recta. Si la llancen en direcció $\vec{d} = (2, 3, 6)$ i sabem que la Lluna es troba a 384.400 km de la Terra, quines són les coordenades de la Lluna respecte de la base localitzada a cap Canaveral?

b) [P. mecànica] Calculau el pla perpendicular a la trajectòria de la nau i que conté la Lluna.

c) [P. mecànica] En lloc de llançar la nau directament cap a la Lluna, normalment fan un primer llançament per ajustar-ne la trajectòria. Tot seguit, en reajusten la trajectòria cap al destí desitjat. Si, partint des de la base, fan el primer llançament en direcció $\vec{d}_{inicial} = (1, 1, 2)$, quina és la direcció que han de posar en el reajustament per arribar a la Lluna amb aquesta segona trajectòria?

d) [P. de raonament] Calculau la intersecció de la recta que passa per la Lluna i té vector director $(2, 3, 6)$, amb el pla $z = 0$.

**Solució:**

a) Sigui $O = (0, 0, 0)$ el punt on es troba la base de cap Canaveral (com que ens demanen la posició de la Lluna respecte d'aquest, la posició de la Lluna $L$ vé donada pel vector $\vec{OL}$, el qual resulta ser el vector $\vec{d} = (2, 3, 6)$ però amb mòdul 384.400 km. Aleshores, hem d'ajustar el mòdul del vector tal que:

$$\vec{OL} = (2, 3, 6) \cdot \frac{384.400}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = (2, 3, 6) \cdot \frac{384.400}{7} = \left(\frac{768.800}{7}, \frac{1.153.200}{7}, \frac{2.306.400}{7}\right) \text{ km.}$$

b) El vector normal del pla que cercam és el propi vector $(2, 3, 6)$ i volem que contengui $L$. Aleshores, el pla $\pi$ que cercam és el $\pi : 2x + 3y + 6z + D = 0$, tal que $D$ satisfà

$$2\,\frac{768.800}{7} + 3\,\frac{1.153.200}{7} + 6\,\frac{2.306.400}{7} + D = 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \cdot 768.800 + 3 \cdot 1.153.200 + 6 \cdot 2.306.400 + 7D = 0,$$

De, on tenim que $D = -\frac{18.835.600}{7} = 2.690.800$ i, per tant, el pla ve donat per

$$\pi : 2x + 3y + 6z - 2.690.800 = 0$$

c) Cercam un vector director $(x, y, z)$ tal que $(1, 1, 2) + (x, y, z) = (2, 3, 6)$. Aleshores,

$$(x + 1, y + 1, z + 2) = (2, 3, 6) \quad \longrightarrow \quad (x, y, z) = (1, 2, 4).$$

d) No cal fer cap càlcul. El pla $z = 0$ conté l'origen $(0, 0, 0)$, que és on es troba la base de la nau. Per construcció, aquest punt pertany a la recta mencionada; aleshores, és el punt d'intersecció.

**Problema 3**

Un Ocell es troba sobre el punt més alt de la Catedral de Palma i es disposa a volar fins a un arbre que es troba als seus voltants, passant pel brollador d'aigua situat dins del llac.

a) [P. procedimental] Indicau com calcularíeu la mínima distància del recorregut.

b) [P. mecànica] Sabent que les localitzacions de la Catedral, arbre i brollador són, segons un cert sistema de referència ortonormal, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$ i $(1, 1, 1)$, aplicau l'algoritme descrit a l'apartat anterior per calcular la mínima distància del recorregut.

c) [P. de raonament] Un cop ha arribat a l'arbre, l'ocell cerca un nou destí, de tal manera que la trajectòria "Catedral - brollador - arbre - nou punt - Catedral" formi un quadrat. És possible? En cas afirmatiu, trobau-lo. En cas negatiu, justificau per què no

**Solució:**

a) Sigui $C \in \mathbb{R}^3$ el punt més alt de la catedral, $A \in \mathbb{R}^3$ la localització de l'arbre destí i $B \in \mathbb{R}^3$ el punt on es troba el brollador. Llavors, el procediment a seguir ve donat per les passes (algoritme) següents:

1. Calculam $\mathrm{dist}(C, B) = |\vec{CB}|$
2. Calculam $\mathrm{dist}(B, A) = |\vec{BA}|$
3. Sumam ambdós resultats

b) $|\vec{CB}| = |(1, -1, 2)| = \sqrt{4} = 2$

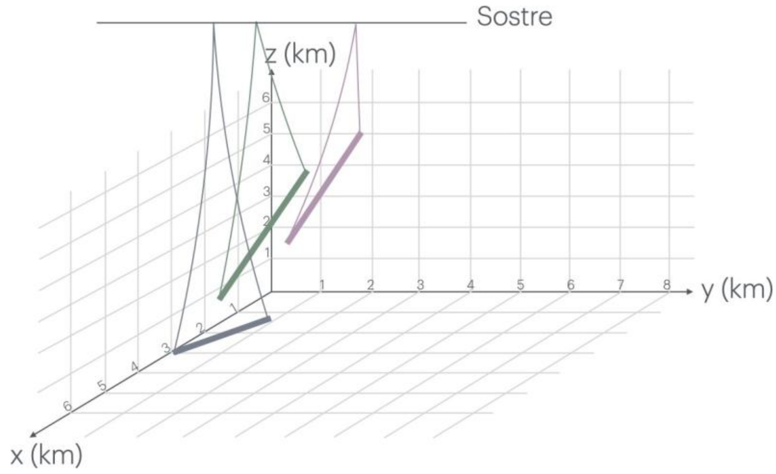
$|\vec{BA}| = |(-1, 0, 0)| = \sqrt{1} = 1$

dist $= |\vec{CB}| + |\vec{BA}| = 2 + 1 = 3$

c) No, ja que $|\vec{CB}| \neq |\vec{BA}|$

**Problema 4**

[P. de raonament] En Joan ha col·locat tres estants que pengen del sostre, de manera que el primer segueix la direcció (1, 2, 5), el segon (3, 2, 1) i el tercer (5, 6, 11). Sense tenir més informació, discutiu raonadament si es podria donar el cas que els estants es toquin en algun punt. En cas afirmatiu, proporcionau tres possibles direccions (una per a cada estant) que assegurin que mai no es tocaran.




**Solució:** Volem veure si existeix interacció entre els tres estants. Algunes idees que es poden tenir en compte serien:

- No ens donen la longitud dels estants. Per tant, en principi podem suposar que són tan llargs com vulguem.
- Si els tres vectors són coplanaris, podem tenir dues situacions: (1) si són paral·lels entre si, no es tallaran; (2) si no són paral·lels entre si, sí que es tallaran.
- Si els tres vectors no són coplanaris, hem de mirar si un dels vectors és paral·lel al pla que formen els altres dos. En aquest cas, no es tallaran.
- Si dues direccions són paral·leles, els dos estants segur que no es tocaran.

Vegem que compleixen els vectors. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Notem que det(A) = 0 i Rang(A) = 2. Aleshores, els tres vectors són coplanaris (es troben en un mateix pla), una direcció és combinació lineal de les altres dues i dos vectors són linealment independents, però no tots tres, amb la qual cosa les trajectòries es podrien tocar i, conseqüentment, existeix perill d'intersecció.

Proporcionam tres direccions que assegurin que no es tallin. Aquestes basta que siguin coplanàries i paral·leles entre si. Per exemple (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 0, 3). En aquest cas, sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

tenim que det(A) = 0 i Rang(A) = 1, amb la qual cosa tenim que les tres trajectòries estan sobre un mateix pla i els tres vectors són linealment dependents (paral·lels). Per tant, les trajectòries segur que no es tallen.