
Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 1

Contestau de manera clara i raonada **quatre dels cinc** exercicis proposats.

1) Una botiga ha venut 40 microones, el preu original de cada un dels quals era de 120 €, amb un descompte del 15% a uns i del 20% als altres restants. El total de la venda d'aquests 40 microones ha estat de 3996 €. Calculeu a quants microones se'ls va aplicar un descompte del 20%. (2.5 punts)

2) Dibuixau la regió determinada per les inequacions

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \geq 12, 2x + y \geq 8$$

i minimitzau la funció $f(x, y) = x + 2y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. (2.5 punts)

3) La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat? (2.5 punts)

4) Calculeu la funció $f(x)$ que verifica $f'(x) - x^3 - 1 = 0$ i $f(-2) = 0$. (2.5 punts)

5) El temari d'unes oposicions consisteix en 46 temes. Un determinat opositor en sap només 22, dels 46. S'elegeixen 3 temes a l'atzar dels 46. Calculeu la probabilitat que aquest opositor sàpiga almenys 1 dels 3 temes. (2.5 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 1

Avaluau cada exercici o cada part d'exercici amb múltiples de quart de punt.

Aquests criteris no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un exercici, ni tan sols la millor.

Hi pot haver casos concrets en què sigui difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Aplica-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Penalitzau els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb 0.75 o 1 punt.

1) Una botiga ha venut 40 microones, el preu original de cada un dels quals era de 120 €, amb un descompte del 15% a uns i del 20% als altres restants. El total de la venda d'aquests 40 microones ha estat de 3996 €. Calculau a quants microones se'ls va aplicar un descompte del 20%. (2.5 punts)

Solució

x = nombre de microones als quals se'ls va aplicar un descompte del 15%

y = nombre de microones als quals se'ls va aplicar un descompte del 20%

Tenim $(120 - 0.15 \cdot 120)x + (120 - 0.2 \cdot 120)y = 3996$, i.e. $102x + 96y = 3996$.

Aleshores tenim el sistema

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 102x + 96y = 3996 \end{cases}$$

[Valoració d'aquesta primera part: 1.5 punts]

$y = 40 - x$ i substituint a la segona equació, $102x + 96(40 - x) = 3996$,

$102x + 3840 - 96x = 3996$, $6x = 156$, $x = 26$, $y = 40 - x = 14$.

Per tant, es va aplicar un descompte del 20% a 14 microones.

[Valoració d'aquesta segona part: 1 punt]

2) Dibuixau la regió determinada per les inequacions

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \geq 12, 2x + y \geq 8$$

i minimitzau la funció $f(x, y) = x + 2y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. (2.5 punts)

Solució

$$\text{Restriccions: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

Funció per minimitzar: $f(x, y) = x + 2y$

Talls amb els eixos:

$2x + 3y = 12$ talla en els punts $(0, 4)$ i $(6, 0)$.

$2x + y = 8$ talla en els punts $(0, 8)$ i $(4, 0)$.

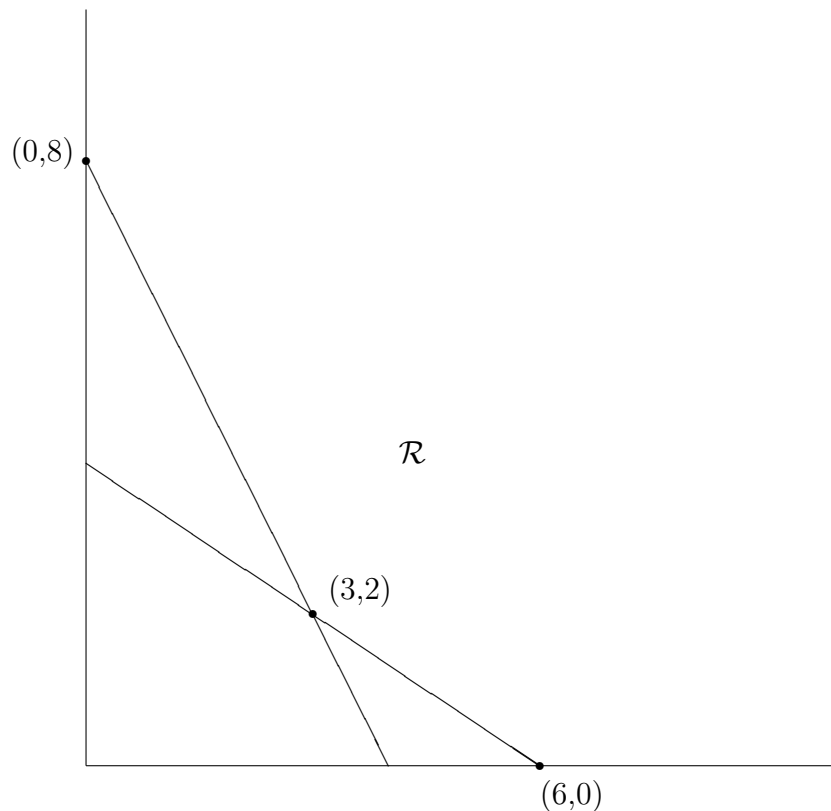
Intersecció de les rectes $2x + 3y = 12$ i $2x + y = 8$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Restant de la primera equació la segona, tenim $2y = 4$; $y = 2$. Substituint aquest valor de y a la segona equació, queda $2x + 2 = 8$ i, per tant, $x = 3$.

Aleshores el punt d'intersecció és el $(3, 2)$.

Per tant, la regió és la marcada amb \mathcal{R} a la figura següent:



[Valoració d'aquesta primera part: 1.25 punts]

Per minimitzar la funció $f(x, y) = x + 2y$, avaluem-la als vèrtexs $(0, 8)$, $(3, 2)$ i $(6, 0)$:

$$f(0, 8) = 2 \cdot 8 = 16, \quad f(3, 2) = 3 + 2 \cdot 2 = 7, \quad f(6, 0) = 6.$$

Aleshores el vèrtex que fa mínima la funció és $(6, 0)$ i $f(6, 0) = 6$.

[Valoració d'aquesta segona part: 1.25 punts]

3) La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat?

(2.5 punts)

Solució

$$\bar{C}(x) = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{200}{x}$$

Aleshores s'ha de calcular el mínim de la funció $\bar{C}(x)$.

[Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts]

$$\bar{C}'(x) = \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2},$$

[Valoració d'aquesta segona part: 1 punt]

$$\bar{C}'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{200}{x^2} \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20.$$

$$\bar{C}''(x) = -200 \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{400}{x^3}, \quad \bar{C}''(20) > 0 \Rightarrow \text{mínim.}$$

Resposta: A un nivell de producció igual a 20.

[Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt]

4) Calculeu la funció $f(x)$ que verifica $f'(x) - x^3 - 1 = 0$ i $f(-2) = 0$.

(2.5 punts)

Solució

$$f'(x) - x^3 - 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = x^3 + 1$$

$$f(x) = \int (x^3 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + x + C$$

[Valoració d'aquesta primera part: 1.5 punts]

$$f(-2) = 0 \Rightarrow \frac{(-2)^4}{4} - 2 + C = 0 \Rightarrow C = 2 - \frac{16}{4} = -2$$

Aleshores la funció és $f(x) = \frac{x^4}{4} + x - 2$

[Valoració d'aquesta segona part: 1 punt]

5) El temari d'unes oposicions consisteix en 46 temes. Un determinat opositor en sap només 22, dels 46. S'elegeixen 3 temes a l'atzar dels 46. Calculeu la probabilitat que aquest opositor sàpiga almenys 1 dels 3 temes. (2.5 punts)

Solució

$$P[\text{sàpiga almenys 1 dels 3 temes}] = 1 - P[\text{ignori els 3 temes}] =$$

[Valoració d'aquesta primera part: 1 punt]

$$= 1 - \frac{24}{46} \cdot \frac{23}{45} \cdot \frac{22}{44} = 1 - \frac{\cancel{2}^2 \cdot \cancel{2}^2 \cdot \cancel{3}^3 \cdot \cancel{2}^2 \cdot \cancel{1}^1}{\cancel{2}^2 \cdot \cancel{2}^3 \cdot \cancel{3}^3 \cdot \cancel{5}^1 \cdot \cancel{2}^2 \cdot \cancel{1}^1} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} = 0.8\bar{6} \approx 0.87$$

[Valoració d'aquesta segona part: 1.5 punts]